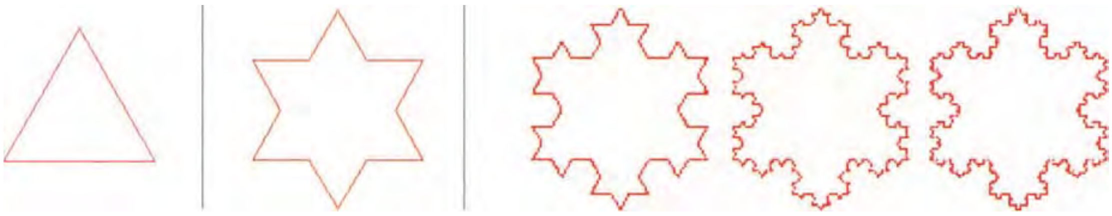
FRAKTÁLOK A TERMÉSZETBEN ÉS AZ INFORMATIKÁBAN

FRACTALS IN NATURE AND INFORMATICS

SZERZŐ:
SALINÉ DR. CZINKÓCZKY ANNA

LEKTOR:
JÁMBOR IMRE



A természetben található tárgyak geometriai leírása olyan régi, mint maga a tudomány. Ezen leíráshoz a mindenki által jól ismert euklideszi vonalakat, téglalapokat, kockákat, gömböket, stb. használják.

De a természetben nemcsak euklideszi idomok vannak. Több mint húsz évvel ezelőtt jelentette ki Benoît Mandelbrot, hogy „A felhők nem gömbök, a hegyek nem kúpok, a partvonalak nem körívek, a fakéreg nem sima, és a villám sem terjed egyenes vonalban." A legtöbb természeti objektum olyan bonyolult alakú, hogy megérdemlik, hogy geometriailag kaotikusnak hívjuk őket. Lehetetlennek tűnt a matematikai leírásuk, ezért a „matematika szörnyetegeinek" nevezték őket.

1975-ben Mandelbrot ezeknek a szörnyetegeknek a leírására bevezette a fraktál fogalmát, amely a számszerű leíráson kívül az ezekben az objektumokban rejlő szabályosság felismerésében is segít bennünket.

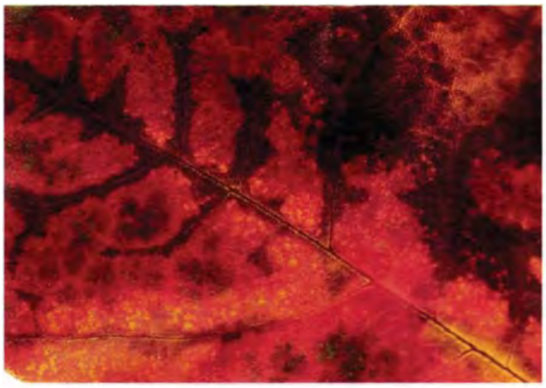
Mik is azok a fraktálok? A szó alapjelentésében a fractum (= tört, latinul) kifejezés található, amely utal nem csak a keletkezésükre, hanem a struktúrájukból következő érdekes matematikai tulajdonságukra. Ahogy később megmutatjuk, a fraktálok dimenziója általában tört szám, léteznek olyan fraktálok, melyek dimenziója például 1,62.

A fraktálok vizsgálata több ezer éves múltra tekint vissza, hiszen az embereket mindig is foglalkoztatta a természetben fellelhető szabályosság, csipkézettség és az ismétlődő mintázat.

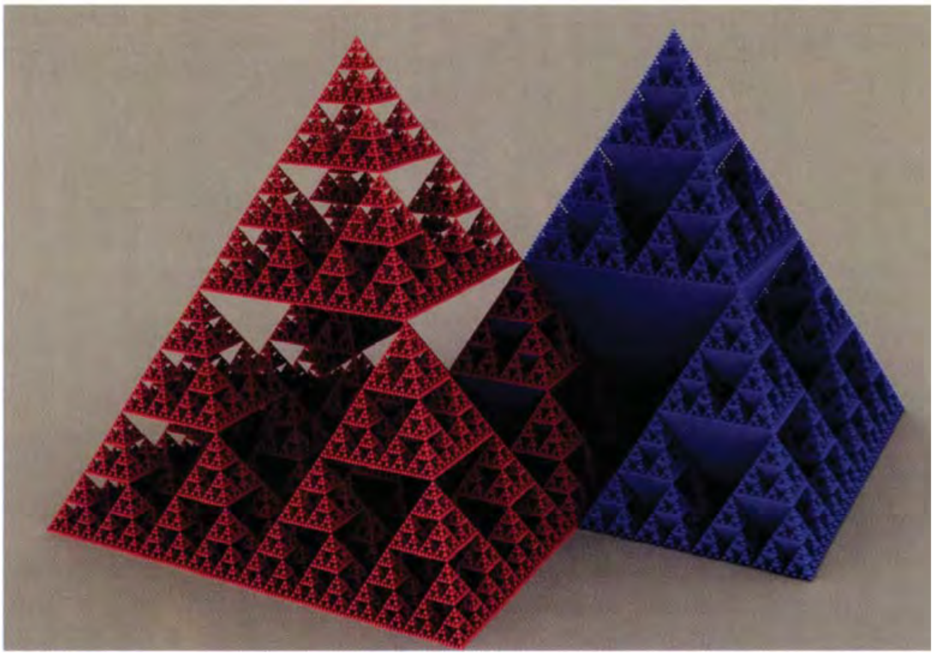
Gondoljunk akár egy hópehely szerkezetére vagy egy sűrű fa lombkoronájára. Ahogy egyre közelebbről és közelebbről vizsgáljuk ezeket, feltűnik, hogy a mintázat struktúrája többé-kevésbé állandó, s jellegzetesen az adott dologra jellemző. Ezt a tulajdonságot nevezik *önhasonlóság*nak, amely azt fejezi ki, hogy egy apró részletet kiszemelve és azt kinagyítva az egész eredeti alakzathoz hasonlót kapunk.

Híres önhasonló alakzat például a Koch-féle hópehely, amelyet a következő eljárással állíthatunk elő:

1. induljunk ki egy egyenlő oldalú háromszögből (1.a ábra)
2. az oldalait harmadoljuk, s a középső harmadoló szakaszra szerkesszünk kifelé egyenlő oldalú háromszöget, s annak az alapját elhagyva egy törtvonalat kapunk. Mindezt végezzük el a háromszög minden oldalára. (1.b ábra)
3. A fenti eljárást tovább folytatva (minden háromszög középső harmadoló szakaszát szabályos törtvonallal helyettesítve) egyre csipkésebb és gazdagabb mintázatú hópelyhet kapunk. Elvileg az eljárás akármeddig folytatható, itt csak az első néhány elemet mutatjuk meg. (1.c ábra)



1. A, B, C kép: Koch-féle hópehely szerkesztése
2. kép: Sierpinski háromszög – 2D ábrázolásban
3. kép: Sierpinski háromszög : 3D-ben
4. kép: Fraktál szerkezetű őszi levél



Felmerülhet kérdésként, hogy mekkora lesz az így kapott „hópelyhek" kerülete?

Ha egységnyi szabályos háromszögből indultunk, akkor az első csipkézet megrajzolásával a kerület 1/3-ával növekszik, azaz az eredeti 4/3-szorosa lesz. Mivel minden lépésben hasonló transzformációt végzünk, a kerületek rendre 4/3-szorosai lesznek az előzőnek, tehát az összhosszúság egy mértani sor összegével egyenlő, amelynek a hányadosa 4/3. Egyszerű matematikai tény, hogy az egynél nagyobb kvóciensű mértani sor divergens (azaz nem ad véges értéket). Ez köznapi nyelven ez azt jelenti, hogy a minden határon túl menő csipkézettség *végtelen hosszú kerület*et produkál. Ugyanakkor a hópehely területe véges, hiszen beírható a négyzetgyök kettő per kettő sugarú körbe, tehát annak területénél kisebb.

A fenti példa talán kissé erőltetettnek hat, és sokakban felmerülhet kérdésként, hogy mi a jelentősége a Koch-féle hópehelynek? Igazából arra az érdekes tényre világít rá, hogy egy csipkézett objektum, ha igazán pontosan meg akarjuk mérni, akkor végtelen hosszú kerületet is közrezárhat.

Hasonlóan nevezetes fraktál az úgynevezett Sierpinski-féle háromszög (1. kép), amelyet úgy származtatunk, hogy a szabályos háromszög oldalfelezési pontjait összekötjük (ezáltal 4, az eredeti szabályos háromszöghöz hasonló keletkezik), s a középső (fekete) háromszöget elhagyjuk, mintegy lyukat kivágva a háromszögből. Ezután az így keletkező háromszögeken tovább folytatjuk az eljárást, minden háromszöget felezünk, a középső részeket elhagyjuk – mintha ollóval egy kicsipkézett papírmintát csinálnánk –, egyre tovább és tovább, a végtelenségig, hiszen minden szakasznak megszerkeszthető a felező pontja. Vegyük észre, hogy ebben az eljárásban is az önhasonlóság öröklődik, az összes háromszög területének öszszege véges (hiszen az eredeti háromszögből nem lépünk ki), azonban a minden határon túlnövő belső csipkézettség a kerületet végtelenre növeli.

Létezik a Sierpinski háromszögnek térbeli ábrázolása is (3. kép).

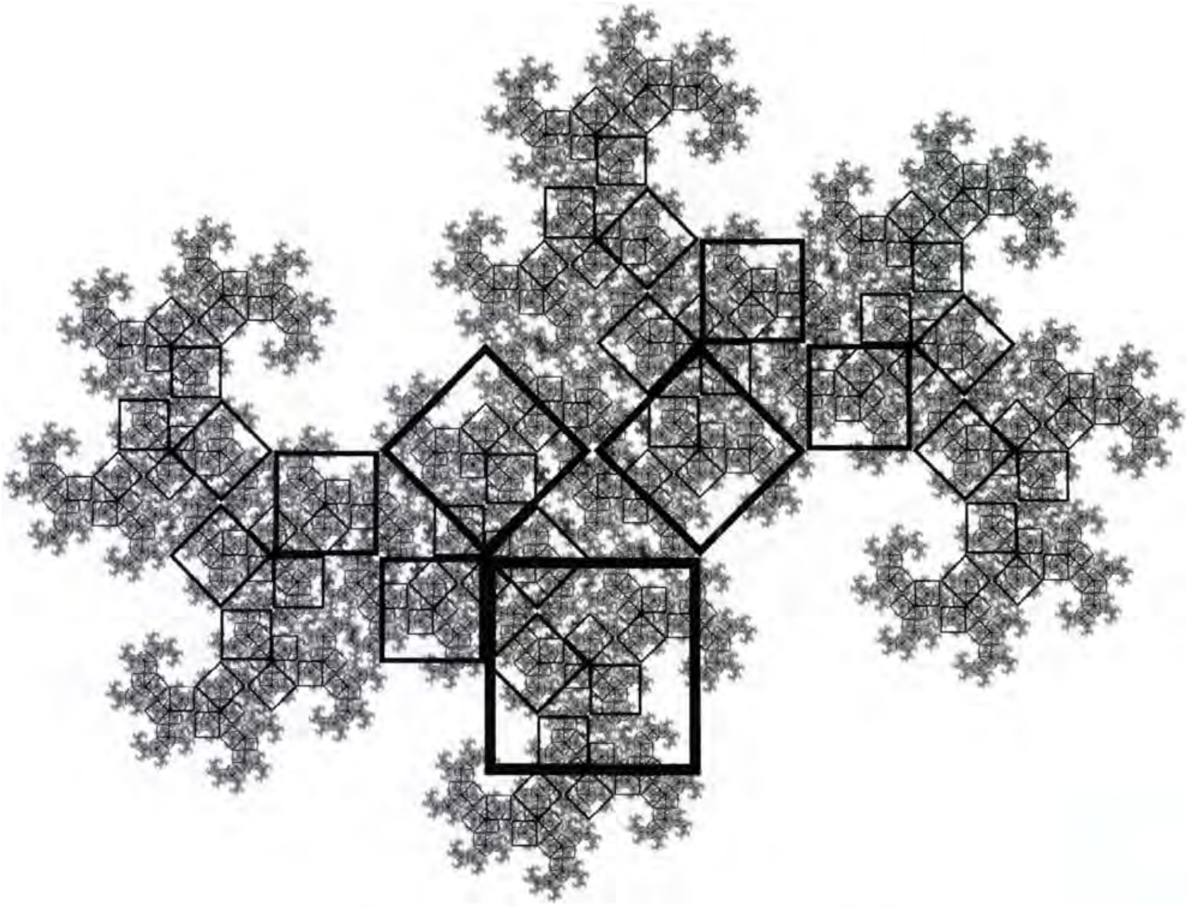
EGYÉB ÉRDEKES FRAKTÁLSZERŰ KÉPZŐDMÉNYEK

A fraktálok furcsa világa megfigyelhető az egyszerű, természetben is fellelhető képződményekben, ahol az elágazásos szerkezet öröklődik. Ilyen például a falevél erezete, a folyók szétágazó torkolata vagy a hegyvonulatok csipkézett mintázata.

A 4. kép egy fraktál szerkezetű őszi levelet ábrázol. Természetesen egyéb híres összefüggések is szemléltetők fraktálokkal. A 5. képen a Pitagorasz-tétel összefüggései fedezhetők fel. A szobrászokat, képzőművészeket is megihlették a gyönyörű fraktálok (6. kép).

FRAKTÁLOK DIMENZIÓJA

Mindenki számára ismert, hogy a geometriai alapelemek közül a pont dimenziója nulla, az egyenes egydimenziós, a sík kétdimenziós, a tér háromdimenziós.



Ha megfigyeljük, hogy ha egy alakzat minden megfelelő hosszát megkettőzzük, akkor az eredetihez hasonló objektumot kapunk. Szakasz kétszerezése esetén kettőt, négyzet oldalának kétszerezése esetén 4-et, a kocka oldalának duplázásakor azonban 8 , az eredetivel egybevágó példányt kapunk. Ezt az egyszerű tényt az alábbiakban is összefoglalhatjuk.

Alakzat	Dimenzió	Példányok száma
szakasz	1	$2 = 2^1$
négyzet	2	$4 = 2^2$
kocka	3	$8 = 2^3$
Sierpinski háromszög	d	$3 = 2^d$

A fenti eljárást követve elmondhatjuk, hogy az eredeti alakzatot megkettőzve a dimenzió a kettőnek olyan alapú hatvány kitevőjével lesz azonos , amelyre a keletkező példányszám esetén az egyenlőség fennáll. Ez egzakt matematikai módszerekkel is bebizonyítható, itt azonban nem törekszünk a bonyolult matematikai formulák használatára. Mivel a Sierpinski háromszög esetén az oldal kettőzésekor 3 darab, az eredetivel azonos nagyságú példány keletkezik, így a $3 = 2^d$ egyenlethez jutunk, amiből d= 1,09 adódik.

FRAKTÁLOK A TERMÉSZETBEN

Vizsgáljunk meg egy fát közelebbről. Válasszuk ki az egyik ágát. Azt látjuk, hogy az ág is apróbb szerteágazó részekre oszlik, mintegy hasonló szerkezetű magához a teljes fához. A káoszelmélet szerint a fa és az ág azonos felépítésűnek tekinthető. Sokak számára a káosz kifejezés a rendezetlenséget, kiszámíthatalanságot, sőt éppenséggel a zűrzavart jelenti.

Ugyanakkor a káosz valójában igenis rendezett és valamely (néha nem evidens) struktúrát követ. A probléma nehézségét legtöbbször az adja, hogy felismerjük a látszólagos kuszaságban a rendező elvet, s megválaszoljuk, hogy az a bizonyos struktúra miért épp úgy alakult ki. A káosz elmélet a fraktálokból indult ki és azt a célt tűzte ki, hogy dinamikusan változó rendszerekre megfelelő modellt adjon és megjósolja időbeli lefolyásukat.

Erre egy jellemző példa a felhők mozgásának kiszámítása, vagy tágabb értelemben az időjárás előrejelzése. De hasonlóan bonyolult és komplexen változó rendszereket (pl. folyóvizek áramlatainak vagy akár vándorló madárrajok mozgását) is fraktálok segítségével modellezhetünk és írhatunk le.

Ezek az előrejelzések (gondoljunk csak a hosszú távú időjárás előrejelzésre) sosem teljesen megbízhatóak, s minél hosszabb időtartamra vonatkoznak, annál bizonytalanabbá válnak. Hiszen rengeteg apró zavaró tényező léphet fel, pl. napkitörések, légáramlatok, amelyek különkülön nem jelentősek, de együttes hatásuk erősítheti egymást, és a rendszert kissé elmozgatva a kezdeti alapállapotától egy teljesen távoli ponthoz konvergál.

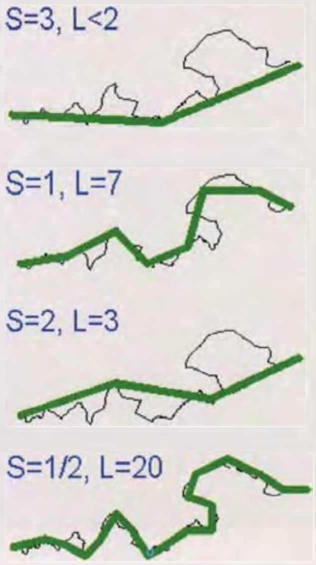
A fraktálgeometria a maga csipkézettségével és egyre finomabb részletezhetőségével kiválóan alkalmas bizonyos természeti jelenségek: partszakaszok, felhők, hegyek leírására, vagy akár a talajerózió modellezésére. Mindezek alapján felmerülhet a kérdés, hogy maga a természet a teljes bonyolultságával valójában igazából fraktálok segítségével írható-e le a legteljesebben.

Azzal is tisztában kell lennünk, hogy az igazi fraktál csak idealizáció. A valós világban előforduló felületek, görbék nem valódi fraktálok, mindössze olyan folyamatok hozták létre őket, amelyet csak egy meghatározott mérettartományban fekvő alakzatot képesek kialakítani. Ezért a természetben levő "fraktál jellegű" képződmények sem bonthatók végtelenségig, és az önhasonlóság is csak többé-kevésbé teljesül.

5. kép: Pitagorasz tétele fraktálokkal
6. kép: Szobor fraktál
7. kép: Brokkoli fraktál, az Aleph One program által generált fraktál, amely egy Mandelbrot-halmaz

8. kép: Számítógép által generált fraktál http://aleph1.sourceforge.net/

MILYEN HOSSZÚ NAGY-BRITANNIA PARTVONALA?



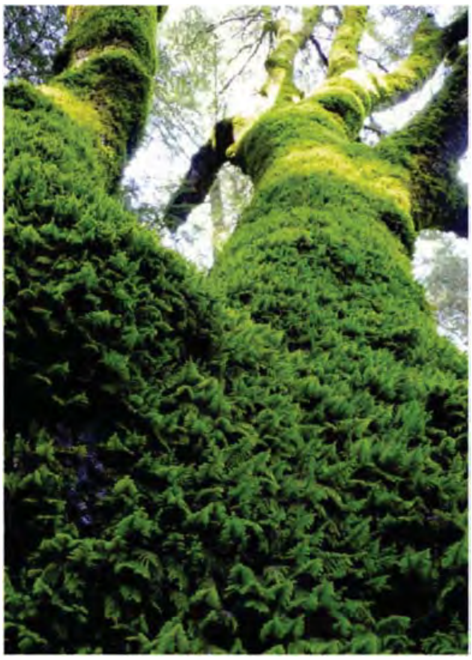
Első pillanatban nagyon egyszerűnek tűnik a kérdés, úgy gondoljuk, hogy egy térkép és egy vonalzó segítségével könnyen megadhatjuk az eredményt. Ám ha egy nagyobb felbontású térképet veszünk elő, s ott is elvégezzük a mérést, akkor az előző eredménynél nagyobb számot kapnánk, hiszen a térképen az eddig egyenesnek jelölt finomabb csipkézettségek is kirajzolódnának, amik megnövelik a partszakasz hosszát.

Ha kilométeres egységekkel mérjük, akkor több száz km hosszú partszakaszt kapunk. Azonban ha kisebb egységeket, pl. méterrudakat használunk, akkor az eddig elnagyolt és figyelmen kívül hagyott apró kiszögellések, csipkézett és töredezett szikladarabok is külön-külön beleszámítanak a partszakaszba, és az előzőnél jóval nagyobb értéket kapunk. Ha a métert kisebb egységgel, pl. cm-rel pótoljuk, akkor az eddiginél még nagyobb hosszúság adódik!

Tehát a partszakasz hossza nem egy abszolút érték, hanem függ a mérőeszköz skálázásától. Ha abszolút pontos értéket szeretnénk kapni, a felosztást egyre finomítva, a partvonal hossza a végtelenhez tartana!

Ezt az összefüggést a mért hosszúság és a felbontás között elsőként Lewis Fry Richardson vette észre (ld. Mandelbrot, 1993).

Hasonló felfedezést tett Benoit Mandelbrot (1924-), aki Nagy-Britannia csipkézett partszakaszának hosszát akarta pontosan megmérni. Mandelbrot nevéhez fűződnek a gyönyörű, korallzátony-csipkézettséget idéző önhasonló mintázatok, valamint a káosz-elmélet is.



9 10 11

9. kép: Fraktális páfrány
10. kép: Fraktál szerű páfrány

11. kép: Tengeri korallzátonyra emlékeztető mesterséges fraktál

FRAKTÁLOK ÉS AZ INFORMATIKA

Az önhasonlóságból következik, hogy a fraktálmintákat úgy lehet létrehozni, hogy egy egyszerű mintázatot állandóan ismétlünk kisebb és kisebb mérettartományokban. A fraktálokat létrehozó eljárások egyik fontos csoportját alkotják az ú.n. *véletlen iterációs algoritmusok*. Ez ahhoz hasonlítható, mintha egy papírt egy tollal véletlenszerűen bepöttyöznénk. Azonban a teljesen össze-vissza mozgás helyett a mozgást bizonyos előre rögzített szabályok alapján irányítjuk. Minden alkalommal ezek a szabályok közül választunk ki egyet, adott valószínűségnek megfelelően, s az adott lépésben a kiválasztott szabály irányítja majd a tollat.

Ezek a szabályok matematikailag felfoghatók egy *kétdimenziós affin transzformáció*nak , amik valójában olyan függvények, amelyekben méretváltozások, elforgatások és eltolások szerepelnek. Általános alakjuk két változóra a következő:

$$Ax(x) = ax + bx + e$$
$$Ay(y) = cy + dy + f$$

Példa

Az 1. táblázatban a páfrányhoz és fűhöz hasonló képek algoritmusainak transzformációihoz való információk találhatók. A táblázatban megtalálható minden transzformációhoz a szükséges a, b, c, d, e és f paraméter. A p valószínűség azt határozza meg, milyen gyakran használandó az adott transzformáció.

1. táblázat: Néhány egyszerű fraktál affin transzformációi[2]

Paraméter*	a	b	c	d	e	f	p
Páfrány	0,0	0,0	0,0	0,16	0,0	0,0	0,10
	0,2	−0,26	0,23	0,22	0,0	1,6	0,08
	−0,15	0,28	0,26	0,24	0,0	0,44	0,08
	0,75	0,04	−0,04	0,85	0,0	1,6	0,74
Fű	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,15
	0,02	−0,28	0,15	0,2	0,0	1,5	0,10
	0,02	0,28	0,15	0,2	0,0	1,5	0,10
	0,75	0,0	0,0	0,5	0,0	4,6	0,65

Természetesen a weben is találhatunk szép számmal gyönyörű és interaktív fraktálokkal kapcsolatos programot és leírást.

A fraktálokkal kapcsolatos tudásunk nagyrészt számítógépes szimulációkból származik, de az előbbiekben is bemutatott felosztásos fraktálkészítés egyszerű és analitikusan is nyomon követhető. Az ilyen modellekkel leírhatjuk azokat az alakzatokat, amelyek folytonos méreteloszlású részecskekeverékek véges alapra való véletlenszerű lerakódásakor keletkeznek. Meghatározott méretű részecskék lerakódásakor a rendszer nyilvánvalóan eléri a zavarási határt, amikor az erős perturbációs hatások miatt már nem helyezhetünk el több részecskét átfedés nélkül. Ha a méreteloszlás folytonos, akkor a rendszer nem éri el ezt a zavarási határt, hanem a rendszer kaotikus volta miatt olyan alakzatokat hoz létre, amelyek fraktálként írhatók le [4] [5].

Megjósolható-e, hogy mikor kapunk olyan rendszert, amelyik véletlenszerű fraktál-tulajdonságokat mutat? Egyelőre erre a kérdésre nincs világos válasz. Azonban úgy tűnik, hogyha azonos kezdeti feltételek mellett nem tudunk mindig pontosan ugyanolyan rendszert létrehozni,[3] de minden egyes másolatban van valami általános hasonlóság, akkor fraktál lesz a végeredmény. Nincs két egyforma hópehely, de jellegzetes alakjuk miatt egy gyermek is azonnal felismeri őket. Végezetül megállapíthatjuk, hogy a komplex alakzatok létrehozása egyszerűbb, mint amilyennek első pillantásra tűnik.

S érjük be pusztán annyival, hogy ha nincs módunk a természetben megcsodálni a valóságos fraktálokat, akkor a számítógépen az informatikai eszközökkel létrehozott mesterséges fraktálokban gyönyörködhetünk. ⊙

SUMMARY

FRACTALS IN NATURE AND INFORMATICS

Geometric desription of natural objects is probably as old as the science itself. Usually common , simple object (spheres, rectangles, squares and cubes etc.) are used to depict everyday objects. However, there are natural objects that cannot be described by Euclidean geometry.
As Benoit Mandelbrot said in his famous work: "Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line."(Mandelbrot, 1983).
Most natural object seems to be so chaotic, that exact mathematical description of them is impossible. Clouds, mountain ranges, lightning bolts, coastlines, and snow flakes. etc, appear similar at all levels of magnification. They possess a structure which is called self-similarity (any subpart of the structure is similar to the whole object).Approximate fractals are easily found in nature. These objects display self-similar structure over an extended, but finite, scale range. Examples include clouds, snow-flakes, crystals, mountain ranges, river networks, cauliflower or blood vessels. Coastlines may be loosely considered fractal in nature.
Trees and ferns are fractal in nature and can be modeled on a computer by using a recursive algorithm.The most common algorithm to compute Iterated Function Systems (IFS) for fractals is called the chaos game. It consists of picking a random point in the plane, then iteratively applying one of the functions chosen at random from the function system and drawing the point. An alternative algorithm is to generate each possible sequence of functions up to a given maximum length, and then to plot the results of applying each of these sequences of functions to an initial point or shape.
Fractal patterns have been found in the paintings of American artist Jackson Poollock. While Pollock's paintings appear to be composed of chaotic dripping and splattering, computer analysis has found fractal patterns in his work.
Other artists such as Max Ernst, could produce fractal-like patterns. Fractals are also prevalent in African art and architecture. Circular houses appear in circles of circles, rectangular houses in rectangles of rectangles, and so on. Such scaling patterns can also be found in African textiles, sculpture, and even cornrow hairstyles. As a conclusion we can say that fractals - which are on the boundary of nature, science and art - are becoming more and more popular these days. ◉